**Concours des 25, 26 et 27 mai 1987 d'admission en 1ère année à l'INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS**

***

**MATHEMATIQUES**

**(Options M.P.T.)**

*(à distribuer aux candidats)*

*

**

PROBLEME N° 1

On se place dans le plan affine euclidien $\mathscr{E}$ qu'on pourra munir d'un repère orthonormal $(O, \vec{I}, \vec{J})$, correspondant aux axes Ox et Oy. On rappelle qu'alors $\mathscr{E}$ peut être mis en bijection avec le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes par l'application qui, au point M de coordonnées (x,y) fait correspondre son affixe $z = x + iy$. (A étant un point de $\mathscr{E}$ on note $\mathscr{E}\setminus\{A\}$, $\mathscr{E}$ privé de A).

Dans un but simplificateur on notera AB la distance des deux points A et B de $\mathscr{E}$ et $\vec{U}\cdot\vec{V}$ le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de l'espace vectoriel euclidien associé à $\mathscr{E}$.

1°) Soit : M un point de $\mathscr{E}$, C un cercle de centre $\Omega$ et de rayon R, D une droite passant par M qui coupe C en deux points $M_1$ et $M_2$ (éventuellement confondus lorsque D est tangente à C). Montrer que la valeur du produit scalaire $\overline{MM_1}\cdot\overline{MM_2}$ ne dépend que de M et de C. Exprimer cette valeur, notée $P_C(M)$ en fonction de $\Omega M$ et de R. Préciser la position de M par rapport à C en fonction du signe de $P_C(M)$.

2°) Soit A un point de $\mathscr{E}$ et k un réel non nul. On appelle inversion de pôle A et de puissance k, l'application $I_{A,k}$ qui, à tout point M de $\mathscr{E}\setminus\{A\}$, fait correspondre le point M' aligné avec A et M et tel que $\overline{AM}\cdot\overline{AM'} = k$.

a) Exprimer $\overline{AM'}$ en fonction de k et de $\overline{AM}$. Explicitez la relation entre a, z et z', affixes respectifs des points A, M et M'.

b) Montrer que $I_{A,k}$ est une bijection de $\mathscr{E}\setminus\{A\}$ sur lui-même et que $(I_{A,k})^{-1} = I_{A,k}$.

c) Etudier la composée $I_{A,k'} \circ I_{A,k''}$ de deux inversions de même pôle A.

d) Soient deux courbes régulières de $\mathscr{E}\setminus\{A\}$, $c_1$ et $c_2$, de classe $\mathscr{C}^1$, tangentes en un point $m_o$. Montrer que leurs transformées $\gamma_1$ et $\gamma_2$ par $I_{A,k}$ sont deux courbes régulières tangentes au point $\mu_o = I_{A,k}(m_o)$.

Dans les questions 3°, 4°, 5° et 7°, les inversions considérées sont toutes de pôle O. On note alors $I_k$ l'inversion de pôle O et de puissance k.

3°) a) Soit D une droite passant par O. Déterminer $I_k(D\setminus\{O\})$.

b) Soit C un cercle de centre O et de rayon R > 0. Déterminer $I_k(C)$.

4°) a) Soit A un point de $\mathscr{E}$, différent de O, situé sur Ox, et C le cercle de diamètre OA. Montrer que $I_{OA^2}(C\setminus\{O\})$ est une droite. Que représente cette droite pour le cercle C ?

b) Soient A un point de $\mathscr{E}$ différent de O, C le cercle de diamètre OA et k un réel non nul. Montrer que $I_k(C\setminus\{O\})$ est une droite dont on précisera un point et la direction.

c) Soit D une droite ne passant pas par O. Déterminer $I_k(D)$.

5°) Soit C un cercle de rayon R > 0, dont le centre $\Omega$ appartient à Ox, et qui ne passe pas par O. On notera $\omega$ l'abscisse de $\Omega$.

a) Déterminer $I_{P_C(O)}(C)$.

b) Lorsque k est un réel non nul, montrer que $I_k(C)$ est un cercle dont on déterminera le centre $\Omega'$ et le rayon R' en fonction de k, $\omega$ et R.

6°) Soient A un point de $\mathscr{E}$ et k un réel non nul. Déduire des résultats précédents les transformés par $I_{A,k}$ des cercles et des droites (éventuellement privés de A) de $\mathscr{E}$.

7°) a) On considère deux cercles concentriques $c_1$ et $c_2$, dont le centre $\Omega$ a pour coordonnées $(\omega,0)$ et dont les rayons respectifs sont $R_1$ et $R_2$ ; on suppose de plus que $R_1$, $R_2$ et $\omega$ vérifient $0 < R_1 < R_2 < \omega$. Préciser les positions respectives de O, $c_1$ et $c_2$.

Une inversion $I_k$, de puissance k strictement positive transforme $c_i$ en $c'_i$ de centre $\Omega'_i$ $(\omega'_i,0)$ et de rayon $R'_i$ (i = 1 ou 2). Montrer que l'on a :

$$0 < \omega'_1 < \omega'_2 \quad \text{et} \quad 0 < \omega_2 - R'_2 < \omega'_1 - R'_1 .$$

En déduire les positions respectives de O, $c'_1$ et $c'_2$.

b) On considère deux cercles non concentriques $c'_1$ et $c'_2$ de centres respectifs $\Omega'_1$ et $\Omega'_2$, et de rayons respectifs $R'_1$ et $R'_2$. On suppose de plus que $c'_1$ est strictement intérieur à $c'_2$. Montrer qu'on peut choisir un repère orthonormal $(O, \vec{I}, \vec{J})$ de $\mathscr{E}$ tel que toute inversion de pôle O et de puissance k > 0 transforme $c'_1$ et $c'_2$ en deux cercles concentriques $c_1$ et $c_2$, avec $c_1$ strictement intérieur à $c_2$.

8°) a) On considère c et C deux cercles concentriques, de centre $\Omega$, de rayons respectifs r et R avec $0 < r < R$. On construit une chaîne $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ de cercles de la façon suivante :

$$(1)\quad \begin{cases} \gamma_1 \text{ est tangent à c et à C ;} \\ \gamma_2 \text{ est tangent à c, à C et à } \gamma_1 ; \\ \forall n \geq 3 \quad \gamma_n \text{ est tangent à c, à C et à } \gamma_{n-1} \text{ et } \gamma_n \text{ est différent de } \gamma_{n-2} . \end{cases}$$

On appelle $\alpha$ l'angle des tangentes issues de $\Omega$ à l'un des cercles $\gamma_i$.
Montrer que $0 < \alpha < \pi$. Expliciter la relation existant entre r, R et $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$.
En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante portant sur r et R pour que la chaîne des cercles $\gamma_n$ se referme (c'est-à-dire qu'il existe N > 1 tel que $\gamma_N$ soit tangent à $\gamma_1$, ou encore $\gamma_{N+1} = \gamma_1$) est :

$$\exists\, p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad 4\, r\, R\, \operatorname{tg}^2 \frac{p\pi}{N} = (R - r)^2 .$$

Montrer que N est indépendant de $\gamma_1$ et est supérieur ou égal à 3. Donner pour N = 3, p = 1 une valeur approchée à $10^{-6}$ près du rapport $\frac{R}{r}$.

b) On considère maintenant deux cercles c et C non concentriques, de rayons respectifs r et R et on appelle a la distance de leurs centres. On suppose en outre que c est strictement intérieur à C. On construit une chaîne $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ de cercles vérifiant les conditions (1) définies au 8°a). En utilisant les résultats obtenus aux questions 2°d, 5°b, 6°, 7°a, montrer que la chaîne $(\gamma_n)$ se referme, avec $\gamma_1 = \gamma_{N+1}$, si et seulement si

$$\exists\, p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad 4\, r\, R\, \operatorname{tg}^2 \frac{p\pi}{N} = (R - r)^2 - a^2 .$$

Vérifier que dans ce cas N ne dépend pas de la position de $\gamma_1$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

## PROBLEME N° 2

On étudie dans ce problème les solutions entières de l'équation :

$$x^2 - y^2 = z^2 \quad (1).$$

On s'attachera plus particulièrement à l'étude de méthodes permettant d'obtenir - à une permutation près de x et y - tous les triplets (x, y, z) de $\mathbb{N}^3$ solutions de (1).

1°) Montrer que, lorsqu'on connait les triplets (x, y, z) de $\mathbb{N}^3$ solution de (1) et premiers entre eux dans leur ensemble, on connait toutes les solutions entières de (1).

2°) Soit (x, y, z) un triplet de $\mathbb{N}^3$ solution de (1) tel que x, y et z sont premiers entre eux dans leur ensemble et tous les trois non nuls.

a) Montrer que x ou y est pair.

b) En supposant que x est pair, vérifier que y et z sont impairs et premiers entre eux. En déduire que $A = \frac{1}{2}(z - y)$ et $B = \frac{1}{2}(z + y)$ sont deux entiers premiers entre eux, puis que ce sont des carrés parfaits. En déduire qu'il existe deux entiers a et b premiers entre eux tels que :

$$0 < a < b \quad , \quad x = 2ab \quad , \quad y = b^2 - a^2 \quad , \quad z = b^2 + a^2 \quad (2).$$

c) Le résultat précédent reste-t-il valable lorsqu'on ne suppose plus x, y et z premiers entre eux dans leur ensemble ?

d) Donner la forme générale des solutions entières de (1).

3°) Soit M une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels. A tout triplet (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, on fait correspondre le triplet $(x_M, y_M, z_M)$ défini par :

$$\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3).$$

On appelle $G_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des matrices M d'ordre 3 à coefficients réels qui vérifient :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad x_M^2 + y_M^2 - z_M^2 = x^2 + y^2 - z^2 \quad (4).$$

a) Montrer que $G_{\mathbb{R}}$ est un groupe pour la multiplication des matrices. Que vaut le déterminant d'une matrice appartenant à $G_{\mathbb{R}}$ ?

b) On appelle $G_{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des matrices d'ordre 3, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, qui appartiennent à $G_{\mathbb{R}}$. Quelle est la structure algébrique de $G_{\mathbb{Z}}$ ?

c) Soit M une matrice de $G_{\mathbb{Z}}$ et (x, y, z) un triplet de $\mathbb{Z}^3$ qui vérifie (1). Que peut-on dire du triplet $(x_M, y_M, z_M)$ défini par (3) ? Montrer que, si on suppose en plus que x, y et z sont premiers entre eux dans leur ensemble, il en va de même pour $x_M$, $y_M$ et $z_M$.

d) Montrer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

appartiennent à $G_{\mathbb{Z}}$. Calculer $A^{-1}$, $B^{-1}$ et $C^{-1}$.



4°) Soit (X, Y, Z) un triplet de $\mathbb{N}^3$ qui vérifie (1), tel que X, Y et Z sont premiers entre eux dans leur ensemble, et X > 0, Y > 0.

On pose : $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $x_1$, $y_1$ et $z_1$ vérifient :

$|x_1| < X$ , $|y_1| < Y$ , $0 < z_1 < Z$ et que $x_1$ ou $y_1$ appartient à $\mathbb{N}$.

En déduire qu'il existe un triplet (x, y, z) de $\mathbb{N}^3$ qui vérifie $x^2 + y^2 = z^2$ , $0 \leq x < X$ , $0 \leq y < Y$ , $0 < z < Z$ avec (X, Y, Z) = $(x_A, y_A, z_A)$ ou $(x_B, y_B, z_B)$ ou $(x_C, y_C, z_C)$ .

b) Déduire de ce qui précède que tout triplet (X, Y, Z) de $(\mathbb{N}\setminus\{0\})^3$, vérifiant (1) et X, Y, Z premiers entre eux dans leur ensemble, peut s'écrire (X,Y,Z) = $(1_M, 0_M, 1_M)$ ou $(0_M, 1_M, 1_M)$ où M est un produit fini des matrices A, B et C;

c) Etudier la réciproque de la propriété établie au 3°c.

5°) a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. Calculer $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire une famille de solutions de (1).

b) Déterminer les valeurs propres de C. Calculer $C^n$ ainsi que $C^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire l'existence d'une infinité de solutions (X, Y, Z) de (1) vérifiant Z = Y + 1.

6°) a) On considère (x, y, z) un triplet de $\mathbb{N}^3$ solution de l'équation $x^4 + y^4 = z^2$ (5) qui vérifie en outre $x \geq 1$ , $y \geq 1$ et x et y premiers entre eux. Montrer qu'alors $x^2$, $y^2$ et z sont premiers entre eux dans leur ensemble. En déduire qu'il existe deux entiers a et b premiers entre eux tels que :

$$0 < a < b \text{ et } x^2 = 2ab \quad , \quad y^2 = b^2 - a^2 \text{ et } z = b^2 + a^2 .$$

Montrer qu'alors, a est pair et que $\frac{a}{2}$ et b sont des carrés parfaits. Montrer enfin qu'il existe deux entiers non nuls c et d, premiers entre eux, tels que a = 2cd et $b = c^2 + d^2$.

En déduire qu'il existe $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ entiers non nuls tels que $\alpha$ et $\beta$ sont premiers entre eux, $\gamma < z$ et $\alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2$. En conclure que l'équation (5) n'admet pas de solution entière (x, y,z) telle que x et y sont premiers entre eux et non nuls.

b) Utiliser les résultats précédents pour étudier les triplets de $\mathbb{N}^3$ (x, y,z) solutions de l'équation $x^4 + y^4 = z^4$ (6).

§

INSTITUT NATIONAL des TELECOMMUNICATIONS
Math 1
page 173
1987